Title	実二次体に付随したMaass wave forms に関する一注意(調和解析と数論)
Author(s)	加藤, 信一
Citation	数理解析研究所講究録 (1987), 631: 66-69
Issue Date	1987-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/100037
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
631巻 1987年 66-69

実二次体に付随した Maass wave forms に関する一注意

京大・教養　加藤信一 (Shin-ichi Kato)

古典的な wave forms が，ある種の関数等式を満たす Dirichlet 級数に対応する保型形式として Maass [M] によって定義・研究されたものであることは周知であろう。例えば実二次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ （Dは判別式）の量指標つき zeta 関数

$$(1)\qquad \zeta_K(s;n,\rho)=\sum_{\substack{\mu\in(\mathcal{O}\setminus\{0\})/E_+(\sqrt{D})\\ \mu\equiv\rho\ (\mathrm{mod}\ \sqrt{D})}}(\operatorname{sgn}N(\mu))^k\left|\frac{\mu}{\mu'}\right|^{nci}\frac{1}{|N(\mu)|^s}$$

（$k=0$ 又は 1，$n\in\mathbb{Z}$，$\rho\in\mathcal{O}=K$ の整数環，
$E_+(\sqrt{D})$ は 総正単数 $\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \sqrt{D})$ 全体のなす群，
$c=\pi/\log\varepsilon$，$\varepsilon>1$ は K の基本単数.）

に対応するものが，標題の"実二次体に付随した wave forms"で，

$$(2)\quad g(z_+;n,\rho)=l_0\delta(n,\rho)\,y^{1/2}$$
$$+\sum_{\substack{\mu\in(\mathcal{O}\setminus\{0\})/E_+(\sqrt{D})\\ \mu\equiv\rho\ (\mathrm{mod}\ \sqrt{D})}}\left|\frac{\mu}{\mu'}\right|^{nci} y^{1/2} K_{nci}\left(\frac{2\pi|N(\mu)|}{D}y\right)e^{2\pi i\frac{N(\mu)}{D}x}$$
$$(z_+=x+iy,\ y>0)$$

で与えられる。ここで $E_+(\sqrt{D})=\langle\varepsilon_0\rangle$，$\varepsilon_0>1$ としたとき，$l_0=\log\varepsilon_0$；$\delta(n,\rho)=1$（$n=0$ かつ $\rho\equiv 0\ (\sqrt{D})$ の時），$=0$（その他）；また $K_{nci}(\ \ )$ は変形 Bessel 関数である。この $g(z_+;n,\rho)$ は"保型性"を持ち，上半平面上の Laplacian $\Delta=-y^2(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)$ の，固有値 $\frac{1}{4}+n^2c^2$ の固有関数である。（その他，詳しくは [M].）

さて，それより以前，Hecke [H] はより"素朴"に zeta 関数 (1)（の $n=0$ の場合）に対して"theta 級数"

$$(3)\quad \vartheta_\pm(z_\pm;n,\rho)=\sum_{\substack{\mu\in(\mathcal{O}\setminus\{0\})/E_+(\sqrt{D})\\ \mu\equiv\rho\ (\sqrt{D}),\ \pm N(\mu)>0}}|\mu|^{2nci}\,e^{2\pi i\frac{N(\mu)}{D}z_\pm}$$

（$z_\pm \in H_\pm$，上（下）半平面）を考え，その"変換公式"を計算した（$n=0$の場合）．勿論 (3) それ自身は"保型性"を持たないが，超函数（hyperfunction，実はすぐわかるように distribution）

$$\vartheta(x;n,\rho) = \vartheta_+(x+i0,n,\rho) + \vartheta_-(x-i0;n,\rho) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

を考えれば，これは"保型的"になる。例えば

$$\vartheta\left(-\frac{1}{x};n,\rho\right) = \frac{|x|^{1+2nci}}{\sqrt{D}} \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{O} \\ \beta \bmod \sqrt{D}}} e^{2\pi i \frac{Tr(\rho'\beta)}{D}} \vartheta(x;n,\beta) \qquad (x \neq 0).$$

これより，実射影直線 $P^1(\mathbb{R})$（局所座標を v, w ; $w=-\frac{1}{v}$）上の実解析的直線束の超函数切断を

$$\begin{cases} v \longmapsto \vartheta(v;n,\rho) \\ w \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{D}} \displaystyle\sum_{\beta \bmod \sqrt{D}} e^{2\pi i\, Tr(\rho'\beta)/D} \vartheta(w;n,\beta) \end{cases}$$

で定めよう； 言い換えれば，超函数値誘導表現

$$\mathcal{B}\text{-}\mathrm{Ind}_P^G(nci) = \left\{ f \in \mathcal{B}(G) ;\ f\left(g\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}\right) = |a|^{-1-2nci} \times f(g) \right\}$$

($G = SL_2(\mathbb{R})$, P = 上三角行列全体 $\subset G$) の "保型的な" 元 $\Theta_{n,\rho}$ を定める。そしてこのPoisson積分 (上記誘導表現の空間から, Laplacianの固有空間への G-準同型)

$$\int_K \Theta_{n,\rho}(gk)\,dk \qquad \left(\begin{array}{l} K = SO(2) \\ dk = \text{正規化された Haar 測度} \end{array} \right)$$

: $g \pmod K$ の関数

を計算すると, $G/K \simeq H_+$ の同一視のもとに, (2) の $g(z_+; n, \rho)$ が定数倍を除いて得られるのである。(計算については [K] を参照されたい。)

[M] H. Maass, Math. Ann. 121 (1949) 141-183

[H] E. Hecke, J. Reine Angew. Math. 157 (1927) 159-170 (Werke 25)

[K] S. Kato, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 34 (1987) (to appear)